Glava 3

DISKRETNI SISTEMI

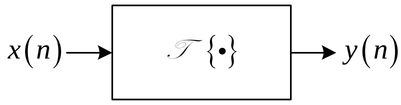
Sistem opisujemo kao proces kojim se vrši transformacija signala. Signal koji se transformiše nazivamo ulaznim signalom ili pobudom sistema, dok rezultat transformacije označavamo kao izlazni signal, ili odziv sistema. Dakle, *diskretni sistem* definišemo kao proces čiji rezultat je transformacija diskretnog ulaznog signala u diskretni izlazni signal, simbolički zapisana sa:

$$y(n) = \mathscr{T}\{x(n)\}, \tag{3.1}$$

ili:

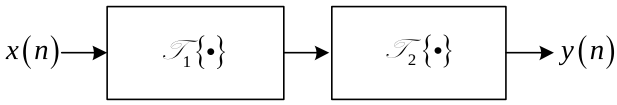
$$x(n) \to y(n), \tag{3.2}$$

gdje je sa $x(n)$ označen ulazni, a sa $y(n)$ izlazni signal. Blok dijagram diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazan je na Slici 3.1. Iako sistemi mogu da imaju više ulaznih signala i više izlaza, u okviru ove knjige ćemo uglavnom posmatrati sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom.

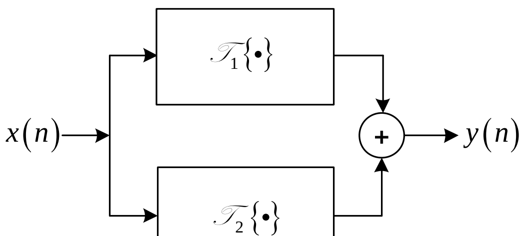


Slika 3.1 Blok dijagram diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom.

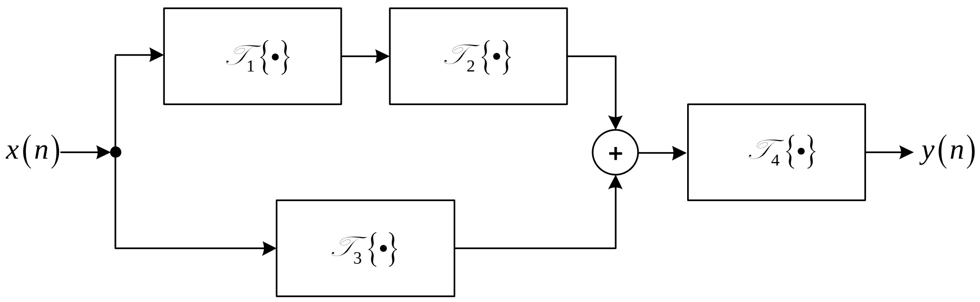
Pri razmatranju složenih sistema poželjno je zadatke pojednostaviti svođenjem složenih sistema na vezu dva ili više jednostavnija sistema, koja može biti *serijska*, *paralelna*, sa *povratnom vezom* ili *kombinovana*. Na Slici 3.2 prikazana je serijska ili *kaskadna* veza dva sistema, dok je paralelna veza data na Slici 3.3. Primjer kombinovanog vezivanja sistema dat je na Slici 3.4. Na ovim slikama simbolom $\oplus$ je označeno sabiranje signala. Posebno važan tip povezivanja sistema predstavljaju sistemi sa *povratnom vezom*. Kod sistema sa povratnom vezom izlaz sistema u direktnoj grani je vezan na ulaz sistema koji se nalazi u povratnoj grani, dok se istovremeno izlaz sistema u povratnoj grani vraća preko sabirača na ulaz sistema u direktnoj grani, kao što je blokovski prikazano na Slici 3.5. Povratna veza može biti pozitivna ili negativna, što se na šemi označava simbolom $\pm$ na liniji povratne veze.



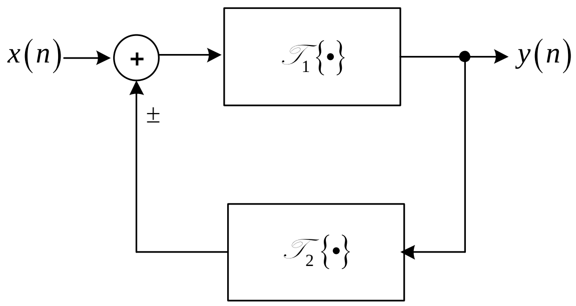
Slika 3.2 Kaskadna veza sistema.



Slika 3.3 Paralelna veza sistema.



Slika 3.4 Primjer kombinovane veze sistema.



Slika 3.5 Sistem sa povratnom vezom.

3.1 Osobine diskretnih sistema

Razumijevanje osnovnih osobina diskretnih sistema olakšava analizu sistema i obradu signala. Sistemi mogu biti sa i bez memorije, kauzalni i nekauzalni, stabilni i nestabilni, invertibilni ili ne, itd. Od naročitog su značaja linearnost i vremenska invarijantnost, te se posebno izdvaja klasa sistema sa ovim osobinama.

3.1.1 Sistemi sa i bez memorije

Sistem bez memorije je onaj sistem kod koga izlazni signal u nekom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaznog signala u tom trenutku. Najjednostavniji primjer diskretnog sistema bez memorije je sistem koji prenosi signal bez promjena, opisan relacijom:

$$y(n) = x(n). \tag{3.3}$$

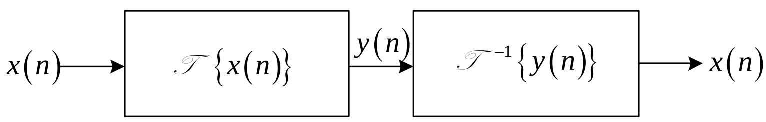
Kod *sistema sa memorijom* izlazni signal ne zavisi samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog i/ili izlaznog signala. Na primjer, izlani signal sistema sa memorijom:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k), \tag{3.4}$$

je jednak zbiru svih prethodnih vrijednosti ulaznog signala.

3.1.2 Invertibilnost i inverzni sistemi

Sistem je *invertibilan* ako poznavajući izlazni signal možemo jednoznačno odrediti ulazni signal. Da bi to bilo moguće neophodno je da različiti ulazini signali generišu različite izlazne signale. Ako se *inverzni sistem* kaskadno veže originalnom sistemu, signal na njegovom izlazu jednak je ulaznom signalu u originalni sistem, kao na Slici 3.6.



Slika 3.6 Koncept invertibilnosti: kaskadna veza originalnog i inverznog sistema.

Na primjer, sistem koji dva puta pojačava ulazni signal:

$$y(n) = 2x(n), \tag{3.5}$$

je invertibilan i njegov inverzni sistem je dat sa:

$$z(n) = \frac{1}{2} y(n). \tag{3.6}$$

Kaskadna datog i njemu inverznog sistema prikazana je na Slici 3.7.

Sistem opisan sa:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k), \tag{3.7}$$

je takođe invertibilan, jer možemo odrediti njegov inverzni sistem:

$$z(n) = y(n) - y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) = x(n). \tag{3.8}$$

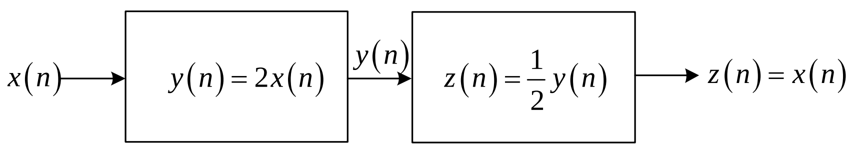
Najjednostavniji primjer neinvertibilnog sistema je:

$$y(n) = 0. \tag{3.9}$$

Takođe, neinvertibilan je i sistem opisan sa:

$$y(n) = x^2(n), \tag{3.10}$$

jer nije moguće jednoznačno odrediti ulazni signal $x(n)$ na osnovu poznatog izlaznog signala $y(n)$.



Slika 3.7 Kaskadna veza originalnog sistema datog sa (3.6) i inverznog sistema datog sa (3.7).

3.1.3 Kauzalnost

Sistem je *kauzalan* ako izlaz u bilo kom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaza u tekućem i prethodnim trenucima, što znači da kod kauzalnih sistema signal odziva ne postoji prije dovođenja pobudnog signala na ulaz sistema. Na primjer, sistem opisan sa

$$y(n) = x(n) - x(n - n_0),\ n_0 > 0 \tag{3.11}$$

je kauzalan, dok sistem:

$$y(n) = x(n) - x(n + n_0),\ n_0 > 0 . \tag{3.12}$$

nije kauzalan. Napomenimo da su svi sistemi bez memorije kauzalni.

Za određivanje odziva nekauzalnih sistema neophodno je poznavanje budućih vrijednosti ulaznog signala, tj. elemenata ulazne sekvence sa većim vrijednostima indeksa. Vrijednost izlaznog signala sistema opisanog sa (3.12) za neku vrijednost nezavisne promjenljive $n = n_1$, je moguće odrediti tek nakon što je poznata vrijednosti ulaznog signala u trenutku $n = n_1 + n_0$. Pobuda u trenutku n_2 kod kauzalnih sistema ne utiče na odziv sistema u trenutku n_1 ukoliko je $n_2 > n_1$.

Kauzalni sistemi su veoma važni u aplikacijama kada se izlazni signal generiše "on-line", tj. paralelno sa pristizanjem elemenata sekvence ulaznog signala. Međutim, kod diskretnih sistema kauzalnost nije od presudnog značaja, posebno u aplikacijama gdje nezavisna varijabla nije vrijeme, ili u "off-line" procesiranju signala (geofizički, meteorološki signali, demografske studije, ekonomske analize), gdje se procesiranje signala vrši nakon njegovog praćenja i bilježenja u dužem vremenskom periodu. U takvim sistemima se, za razliku od "on-line" procesiranja, za generisanje izlaznog signala u nekom trenutku mogu koristiti i buduće vrijednosti ulaznog signala, te kažemo da se radi o nekauzalnim sistemima.

3.1.4 Stabilnost

Sistem je *stabilan* ako mala promjena ulaza ne generiše izlaz koji divergira. To znači da odziv na ograničenu pobudu mora biti ograničen. U suprotnom, sistem je nestbilan.

3.1.5 Vremenska invarijantnost

Ako pomak ulaznog signala u domenu diskretnog vremena uzrokuje samo vremenski pomak izlaznog signala za isti iznos vremenskih intervala, pri čemu vrijednosti elemenata signala ostaju nepromijenjene, kažemo da je sistem *vremenski invarijantan*. Pri tome pod izlaznim signalom podrazumijevamo odziv pri nultim početnim uslovima. Kod vremenski invarijantnih sistema oblik izlaznog signala ne zavisi od trenutka u kome se dovodi pobudni signal. Osobinu vremenske invarijantnosti diskretnih sistema zapisujemo na sljedeći način:

$$x(n) \to y(n) \Rightarrow x(n-n_0) \to y(n-n_0). \tag{3.13}$$

<u>Primjer 3.1:</u>

Provjeriti da li je diskretni sistem opisan sa $y(n) = Ax(n)$ vremenski invarijantan.

Rješenje:

Potražimo odzive na signale $x_1(n)$ i $x_2(n) = x_1(n-n_0)$, koji je vremenski pomjerena verzija signala $x_1(n)$. Odziv datog sistema na $x_1(n)$ je:

$$y_1(n) = Ax_1(n), \tag{3.14}$$

dok je odziv na $x_2(n)$ dat sa:

$$y_2(n) = Ax_2(n) = Ax_1(n-n_0). \tag{3.15}$$

Budući da je odziv $y_2(n)$ vremenski pomjeren u odnosu na odziv $y_1(n)$ za isti iznos diskretnih vremenskih jedinica n_0 koliko iznosi pomak između signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$:

$$y_2(n) = y_1(n-n_0), \tag{3.16}$$

sistem jeste vremenski invarijantan.

□

<u>Primjer 3.2:</u>

Provjeriti da li je diskretni sistem opisan sa $y(n) = nx(n)$ vremenski invarijantan.

Rješenje:

Za ulazni signal $x_1(n)$ odziv datog sistema ima oblik:

$$y_1(n) = nx_1(n). \tag{3.17}$$

Ako je ulazni signal pomjerena verzija prethodnog ulaznog signala, tj. $x_2(n) = x_1(n-n_0)$, odziv na $x_2(n)$ je dat sa:

$$y_2(n) = nx_2(n) = nx_1(n-n_0). \tag{3.18}$$

Budući da odziv na $x_2(n)$ nije vremenski pomjerena verzija odziva na $x_1(n)$:

$$y_2(n) \neq y_1(n-n_0) = (n-n_0)x_1(n-n_0), \tag{3.19}$$

za razliku od sistema posmatranog u Primjeru 3.1, sistem $y(n) = nx(n)$ nije vremenski invarijantan.

□

3.1.6 Linearnost

Kažemo da je diskretni sistem *linearan* ako ispunjava princip *homogenosti* i princip *aditivnosti*. Princip homogenosti je ispunjen ako vrijedi da je:

$$x(n) \to y(n) \Rightarrow ax(n) \to ay(n),\ \forall a \in \mathbb{C}, \tag{3.20}$$

dok je principu aditivnosti ispunjen ako vrijedi sljedeće:

$$x_1(n) \to y_1(n) \wedge x_2(n) \to y_2(n) \Rightarrow x_1(n) + x_2(n) \to y_1(n) + y_2(n). \tag{3.21}$$

Kod linearnih sistema odziv na težinsku suma signala je jednak na isti način formiranoj težinskoj sumi pojedinačnih odziva na svaki od tih signala:

$$\begin{aligned} &x_1(n) \to y_1(n) \wedge x_2(n) \to y_2(n) \Rightarrow \\ &ax_1(n) + bx_2(n) \to ay_1(n) + by_2(n),\ \forall a, b \in \mathbb{C} \end{aligned}. \tag{3.22}$$

Ovaj princip linearnosti je šematski prikazan na Slici 3.8.

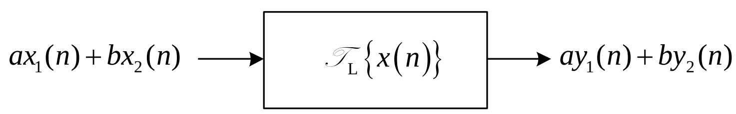
Na osnovu principa linearnosti, lako se dokaže *osobina superpozicije* linearnih diskretnih sistema. Za pobudu datu sa:

$$x(n) = \sum_k a_k x_k(n) \tag{3.23}$$

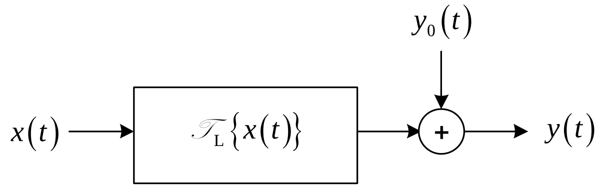
odziv je jednak:

$$y(n) = \sum_k a_k y_k(n), \tag{3.24}$$

pri čemu su $x_k(n),\ k = 1, 2, \ldots$ pobudni signali, a $y_k(n),\ k = 1, 2, \ldots$ njima odgovarajući signali odziva.



Slika 3.8 Princip linearnosti.



Slika 3.9 Struktura inkrementalno linearnog sistema.

Treba naglasiti još jednu osobinu linearnih diskretnih sistema, koja je direktna posljedica linearnosti. Odziv na signal koji je jednak nuli, takođe je jednak nuli:

$$x(n)=0\cdot x_1(n)=0\rightarrow y(n)=0\cdot y_1(n)=0. \tag{3.25}$$

Ukoliko sistem linearno odgovara na promjenu ulaznog signala, tj. ako je razlika odziva na bilo koja dva ulazna signala linearno zavisna od razlike tih ulaznih signala, nazivamo ga *inkrementalno linearnim sistemom*. Blok šema inkrementalno linearnog sistema blokovski je prikazana na Slici 3.9.

Primjer 3.3:

Provjeriti da li je sistem opisan sa $y(n)=2x(n)+3n$ linearan i inkrementalno linearan.

Rješenje:

Odzivi datog sistema na dva pobudna signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$ su:

$$y_1(n)=2x_1(n)+3n, \tag{3.26}$$

$$y_2(n)=2x_2(n)+3n. \tag{3.27}$$

Odziv datog sistema na linearnu kombinaciju signala $ax_1(n)+bx_2(n)$ je:

$$y(n)=2\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]+3n=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3n. \tag{3.28}$$

Kako je

$$y(n) \neq ay_1(n) + by_2(n) = 2ax_1(n) + 2bx_2(n) + 6n, \tag{3.29}$$

sistem nije linearan.

Međutim, razlika odziva je linearno vezana sa razlikom pobudnih signala

$$y_1(t) - y_2(t) = 2x_1(t) + 3 - \left[2x_2(t) + 3\right] = 2\left[x_1(t) - x_2(t)\right], \tag{3.30}$$

te sistem jeste inkrementalno linearan.

□

3.2 Klasifikacija kontinualnih sistema

Diskretne sisteme je moguće klasifikovati na različite načine, ovisno o njihovim osobinama. Najčešće se vrši podjela sistema na: statičke i dinamičke, kauzalne i nekauzalne, stabilne i nestabilne, sisteme sa raspodijeljenim i sisteme sa koncentrisanim parametrima, linearne i nelinearne, stacionarne i nestacionarne, te determinističke i stohastičke sisteme. Razmotrićemo posebno svaku od navedenih podjela.

3.2.1 Statički i dinamički sistemi

Na osnovu toga da li sistemi imaju sposobnost da memorišu podatke o signalima ili ne, izvršena je podjela sistema na statičke i dinamičke. *Statički sistemi* su sistemi bez memorije i kod njih izlaz u nekom trenutku zavisi jedino od pobude u tom istom trenutku. Statički sistemi opisuju se algebarskim jednačinama. Primjer statičkog diskretnog sistema je sistem opisan relacijom:

$$y(n) = 2x(n). \tag{3.31}$$

Sistemi sa memorijom su *dinamički sistemi*. Razmatrajući osobine diskretnih sistema, već smo govorili o tome da izlaz ovakvih sistema u nekom trenutku ne zavisi samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog signala.

Dinamički sistemi se opisuju jednačinama diferencija. Kao primjer dinamičkog diskretnog sistema možemo navesti sistem opisan jednačinom diferencija:

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)-\frac{1}{4}y(n-1). \qquad (3.32)$$

3.2.2 Kauzalni i nekauzalni sistemi

Kada je riječ o dinamičkim sistema, oni mogu biti *kauzani* i *nekauzalni*. Samo sistemi koje ne rade u realnom vremenu mogu da budu nekauzalni, tj. da generišu izlazne signale u bilo kom trenutku diskretnog vremena $n=n_k$ ne samo na osnovu trenutnih i prethodnih, već i na osnovu vrijednosti pobudnog signala za $n>n_k$.

3.2.3 Stabilni i nestabilni sistemi

Ako je odziv na ograničen pobudni signal takođe ograničen, kažemo da je diskretni sistem *stabilan*, dok je u suprotnom *nestabilan*. Primjer stabilnog sistema je:

$$y(n)=2x(n). \qquad (3.33)$$

Izlaz ovog sistema ostaje ograničen za sve pobude koje su ograničene, dok je sistem opisan sa:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k) \qquad (3.34)$$

nestabilan. Na primjer, ako na ulaz ovog sistema dovedemo Hevisajdovu sekvencu $x(n)=u(n)$, njegov izlaz će neograničeno rasti sa porastom vremenske varijable n.

3.2.4 Sistemi sa raspodijeljenim i sistemi sa koncentrisanim parametrima

Ponašanje prostorno distribuiranih sistema može da zavisi i od vremena i od prostora kao nezavisnih varijabli. Ukoliko je ponašanje sistema u svakoj tački prostora podjednako i zavisi samo od vremena kao nezavisne varijable, kažemo da se radi o *sistemu sa koncentrisanim parametrima*. Takvi sistemi se opisuju običnim diferencijalnim jednačinama.

Međutim, kada se ponašanje složenih dinamičkih prostorno distribuiranih sistema mijenja i u vremenu i u prostoru, tada se radi o *sistemima sa raspodijeljenim parametrima*. Budući da su u ovim sistemima nezavisne promjenljive i vrijeme i prostorne koordinate, oni se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

3.2.5 Linearni i nelinearni sistemi

Ako sistem sa koncentrisanim parametrima zadovoljava princip linearnosti dat sa (3.22) kažemo da je *linearan*, u suprotnom je *nelinearan*. Linearni sistemi se opisuju linearnim diferencijalnim jednačinama. Za opis nelinearnih sistema neophodno je koristiti nelinearne diferencijalne jednačine.

3.2.6 Stacionarni i nestacionarni sistemi

Vremenski invarijantne dinamičke sisteme sa koncentrisanim parametrima jednim imenom nazivamo *stacionarni sistemi*. Diferencijalne jednačine koje opisuju stacionarne sisteme imaju konstantne koeficijente.

Sistemi čije se ponašanje u toku vremena mijenja nazivamo vremenski promjenljivom ili *nestacionarnim sistemima*. Diferencijalne jednačine koje opisuju nestacionarne sisteme imaju vremenski promjenljive parametre.

3.2.7 Deterministički i stohastički sistemi

Deterministički sistemi obrađuju determinističke signale. Odzivi ovih sistema, kao i njihovi parametri su takođe deterministički.

Za razliku od determinističkih sistema, *stohastički sistemi* transformišu stohastičke pobudne signale u stohastičke signale odziva. Parametri stohastičkih sistema mogu, ali ne moraju biti slučajne varijable.